

DOPPELSUMMATION VON ZUFALLSGRÖSSEN: VON AEROTRIANGULATION UND INERTIALNAVIGATION ZU DIGITALEN GELÄNDEMODELLEN

HELMUT MORITZ, Graz

ZUSAMMENFASSUNG

Die Doppelsummation von unabhängigen Zufallsgrößen („white noise“) führt zu glatten, fast deterministisch aussehenden Kurven. Dieses Problem ist schon lange bekannt. Heute spielt es eine grundlegende Rolle bei Fehlermodellen in Inertialnavigation und Satellitengeodäsie. Eine direkte Verallgemeinerung auf zwei Dimensionen liefert stochastische digitale Geländemodelle.

1. EINFACHE UND DOPPELSUMMATION

In Arbeiten von E. Gotthardt und R. Roelofs wurde auf das Phänomen der Doppelsummation bei der Aerotriangulation hingewiesen, wodurch aus unabhängigen zufälligen Fehlern ein Ergebnis erhalten wird, das durchaus systematischen Charakter hat. Der Verfasser (Moritz 1960) hat dieses quasisystematische Verhalten aus der Statistik erklärt.

Was ist Doppelsummation? Bezeichnen wir die ursprünglichen zufälligen Fehler mit a, b, c, d, e (statt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ usw.), so ist die einfache Summe der Vektor

$$\Sigma = (a, a+b, a+b+c, a+b+c+d, a+b+c+d+e)$$

und die Doppelsumme der Vektor

$$\Sigma\Sigma = (a, 2a+b, 3a+2b+c, 4a+3b+2c+d, 5a+4b+3c+2d+e).$$

Hier haben wir für die Anzahl der ursprünglichen Fehler $n = 5$ gewählt, aber es geht auch mit beliebig großen n , etwa $n = 10000$. Wir können Σ genauer mit kumulativer Summe und $\Sigma\Sigma$ mit kumulativer Doppelsumme bezeichnen (beides sind Vektoren!).

Wenn wir mit $n \rightarrow \infty$ gehen, so wird aus der einfachen Summe Σ ein einfaches Integral \int und aus der Doppelsumme $\Sigma\Sigma$ ein Doppelintegral \iint .

Unser anfängliches Problem war die Doppelsumme bei der Aerotriangulation. G. Brandstätter (1990) hat dieses Problem auf die Fehlerfortpflanzung bei einem gestreckten Polygonzug angewendet.

2. ANWENDUNG AUF DIE INERTIALNAVIGATION

Bei der Inertialnavigation oder der Inertialvermessung wird die gemessene Beschleunigung B nach der Zeit t integriert. Das Ergebnis ist die Geschwindigkeit V . Eine nochmalige Integration ergibt die gewünschte (relative) Position P . Also

$$V = \int B dt, \quad P = \int V dt = \iint B dt dt'$$

(Jekeli 2001). Wir bezeichnen die Fehler (Rauschen, Neudeutsch Noise) von B, V, P mit den entsprechenden Kleinbuchstaben b, v, p und ersetzen das Integral durch eine Summe, was bei der numerischen Rechnung unerlässlich ist. So erhalten wir

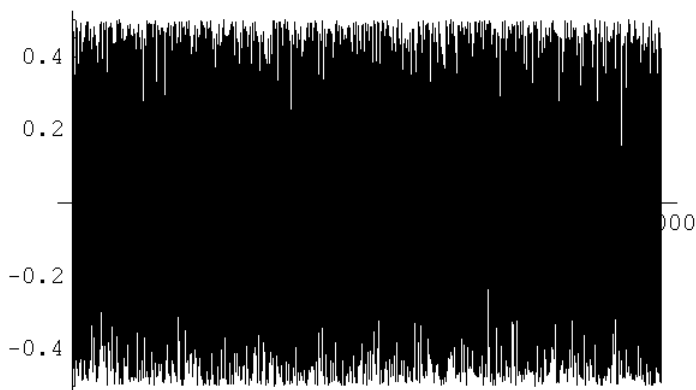
$$v = \Sigma b, \quad p = \Sigma v = \Sigma \Sigma b.$$

Das ist aber genau die mathematische Struktur des ersten Abschnitts!

3. NUMERIK

Es wird also alles auf Summen Σ (die beliebig groß werden können) zurückgeführt. Wir verwenden die mathematische Sprache MATHEMATICA. Außerdem brauchen wir noch gleich verteilte Zufallszahlen, also diskretes „weißes Rauschen“ (*white noise*). Gleichverteilung ist etwas einfacher als Normalverteilung und liefert wegen der zentralen Grenzwertsatzes praktisch gleiche Ergebnisse. Das macht der Befehl (Zufallsgenerator, anschließend Bild):

```
whiteNoise = Table[Random[Real, {-.5, .5}], {i, 10000}];  
ListPlot[whiteNoise, PlotJoined -> True];
```



Figur 1. Weißes Rauschen („white noise“)

Das stellt eine „Liste“ dar, das heißt einen Vektor, dessen Elemente das oben gezeigte weiße Rauschen darstellen (er ist wirklich gleichmäßig zufallsverteilt!).

Für die Integration (kumulative Summe) gibt es einen Befehl „FoldList“:

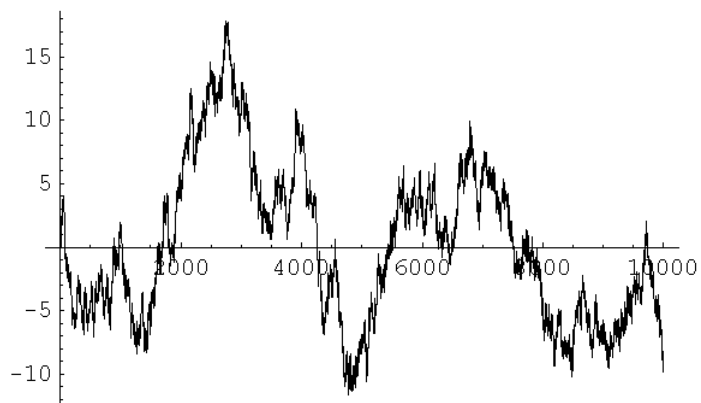
`FoldList[Plus, 0, list]` generates cumulative sums of the elements in *list*.

`FoldList[Plus, 0, {a, b, c}]` → {0, a, a+b, a+b+c},

der natürlich auch für sehr lange Listen (sehr großes *n*) gilt. Wir nehmen ja $n = 10000$.

Also weiter:

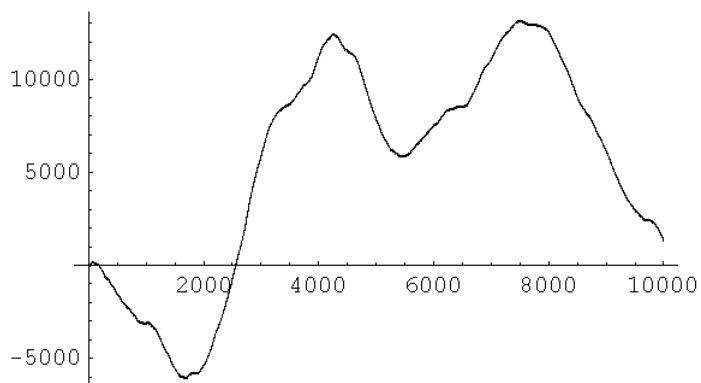
```
brownianNoise = Rest[FoldList[Plus, 0, whiteNoise]];
ListPlot[brownianNoise, PlotJoined -> True];
```



Figur 2. Brownsche Bewegung („brown noise“) durch einfache Summation

Eine weitere Integration gibt die Doppelsummation und eine sehr glatte, aber natürlich auch „zufällige“ Kurve

```
smoothCurve = Rest[FoldList[Plus, 0, brownianNoise]];
ListPlot[smoothCurve, PlotJoined -> True];
```



Figur 3. Glatte Kurve („smooth noise“) durch Doppelsummation

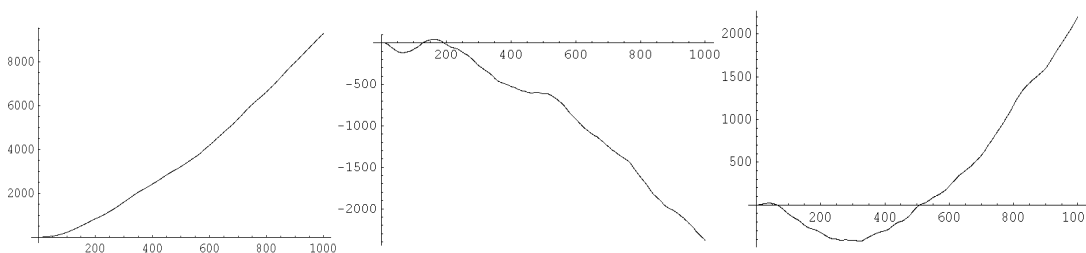
4. ERKLÄRUNG

Die obigen Figuren zeigen, wie durch aufeinander folgende Summationen (oder Integrationen, was praktisch das Gleiche ist), aus dem weißen Rauschen (*white noise*) zunächst die (eindimensionale) Brownsche Bewegung (Brownian noise oder kurz und respektlos *brown noise*) und anschließend eine recht glatte Kurve („smooth noise“) entsteht. Das entspricht der Tatsache, dass Integration glättet. Umgekehrt wirkt Differentiation aufrauend, was der umgekehrte Weg von Figur 3 zurück nach Figur 1 sehr schön zeigt.

Im kontinuierlichen Fall $n \rightarrow \infty$ ist das weiße Rauschen weder stetig noch differenzierbar, die Brownsche Bewegung ist überall stetig, aber nicht differenzierbar, und das Ergebnis der Doppelsummation ist überall stetig und einmal differenzierbar. (Für seine Beiträge zur Erklärung der Brownschen Bewegung u.a. hat Albert Einstein 1905 den Nobelpreis erhalten!)

Bei der Brownschen Bewegung ist ein *Funktionswert* mit dem nächsten Wert stark korreliert, bei der Doppelsummation sind auch die *Neigungen* der Verbindungslinien *AB* und *BC* zwischen je zwei aufeinander folgenden Funktionswerten von *A, B, C* sehr stark miteinander korreliert, wie in (Moritz 1960) gezeigt wurde.

Selbst die glatte Kurve von Figur 3 ist aber *stochastisch*: sie lässt sich nicht durch eine beliebig oft differenzierbare analytische Funktion darstellen. Drei mögliche solche Kurven zeigen dies:



Figur 4. Drei Beispiele zur Doppelsummation

5. FOURIERTRANSFORMATION UND SPEKTRALE METHODEN

Die bekannte Fouriertransformation ordnet einer Funktion $h(t)$ im Zeitbereich (Variable t) eine Funktion $H(f)$ im Frequenzbereich (Variable f) zu. Wir schreiben

$h(t) \rightarrow H(f)$ Fouriertransformation

umgekehrt $H(f) \leftarrow h(t)$ inverse Fouriertransformation

Das Power-Spektrum $P(f)$ ist der statistische Erwartungswert E aller Quadrate der Funktion H :

$$P(f) = E\{|H(f)|^2\}. \tag{1}$$

Fouriermethoden sind heute in der Geodäsie sehr bekannt. Wir verweisen z.B. auf (Papoulis 1981, Part 1). Der Leser möge manche Vereinfachungen verzeihen.

Bedeutet $P_0(f)$ das Power-Spektrum der weißen Rauschens $n_0(t)$, so ist

$$P_0(f) \equiv \text{const.} = 1. \quad (2)$$

(Alle Frequenzen sind gleichmäßig vertreten, und wir können diese Konstante per definitionem gleich 1 setzen.)

Für irgendeine andere Funktion $h(t) \rightarrow H(f)$ gilt die Formel (1). Sehr wichtig ist der Fall

$$P(f) = 1/f^\beta. \quad (3)$$

Wir sprechen dann von einem Exponentialgesetz (*power law*); siehe (Schroeder 1991, S. 121ff.). Für $\beta = 0$ haben wir nach (2) das weiße Rauschen; für $\beta = 2$ die Brownsche Bewegung; und für $\beta = 4$ die glatte Kurve einer Doppelsumation. Der Beweis ist einfach: Für Differentiation und Integral gilt: Differentiation im Zeitbereich entspricht Multiplikation mit f im Frequenzbereich:

$$h'(t) \rightarrow fH(f) \text{ und daher } \int h(t) dt \rightarrow H(f)/f.$$

Das Power-Spektrum $P(f)$ hat gemäß (1) den Charakter eines Quadrates, und somit gilt für die Brownsche Bewegung $\beta = 2$ (das Quadrat von f in $H(f)/f$).

Also bedeutet $\beta = 4$ eine weitere kumulative Integration, also eine Doppelsumme des weißen Rauschens.

Daher ist für β ein Wert $0 \leq \beta \leq 4$ (und größer) möglich und man kann zwischen 0 und 4 beliebig interpolieren. Das ergibt „farbiges Rauschen“ (*colored noise*), was wir in weiterer Folge besprechen werden.

6. FARBIGES RAUSCHEN

Wir wollen ein Rauschprofil mit einem beliebig vorgegebenen Power-Spektrum (3)

$$P(f) = f^{-\beta}$$

erzeugen. Eine zugehörige Rauschfunktion $h(t)$ bzw. $H(f)$ kann folgendermaßen gefunden werden:

$$H(f) = N_0(f)/f^{-\beta/2}, \quad (4)$$

weil nach (2) folgt:

$$P(f) = P_0(f) f^{-\beta} = f^{-\beta}.$$

Entsprechend dem weißen Rauschen $n_0(t)$ bezeichnen wir nun sein Gegenstück im Spektralbereich mit $N_0(f)$. Ein weißes Rauschen $n_0(t)$ wird nach Abschnitt 3 durch einen Zufallsgenerator erzeugt, und eine Fourier-Transformation ergibt daraus $N_0(f)$. Gl. (4) beschreibt das farbiges Rauschen im Spektralbereich, und eine Rücktransformation in den Zeitbereich ergibt schließlich das gesuchte farbiges Rauschprofil $h(t)$ für das Exponentialgesetz mit vorgegebenem β . Graphisch dargestellt:

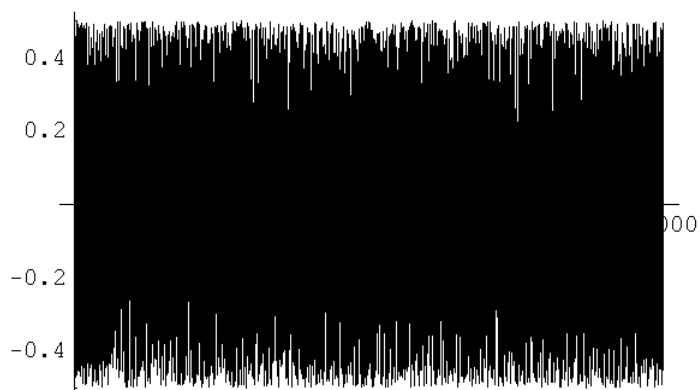
Zeitbereich**Frequenzbereich**weißes Rauschen $n_0(t) \longrightarrow N_0(f)$ farbiges Rauschen $h(t) \longleftarrow H(f) = N_0(f) f^{-\beta/2}$

Dies wird durch die folgende MATHEMATICA-Funktion dargestellt: Das kleine Programm erklärt sich fast selbst: $n_$ ist die Zahl der verwendeten Punkte, $\beta_$ ist der vorgegebene Wert des Glattheitsparameter β , und „Module“ ist ein vom Programm verwendeter Begriff, den man für das Verständnis am besten ignoriert; „Fourier“ und „InverseFourier“ bezeichnen die (diskrete) Fouriertransformation und ihre Inverse.

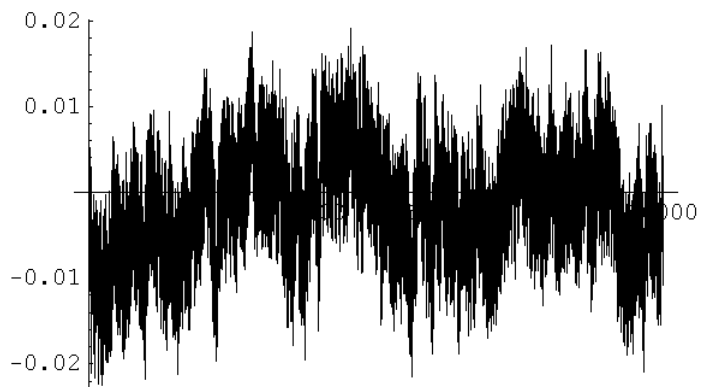
```
coloredNoise[n_,  $\beta_$ ] := Module[{n1,  $\beta$ 1},  
  n1 = n ;  
   $\beta$ 1 =  $\beta$  ;  
  white = Table[(Random[] - 0.5), {n1}] ;  
  fourier0 = Fourier[white] ;  
  fourier1 = Table[fourier0[[i]] / ((i * i) ^ ( $\beta$  / 4)), {i, n1}] ;  
  colored = Re[InverseFourier[fourier1]] ;  
  ListPlot[colored, PlotJoined -> True]]
```

Wir haben dann z.B. für 10000 Punkte und verschiedene β :

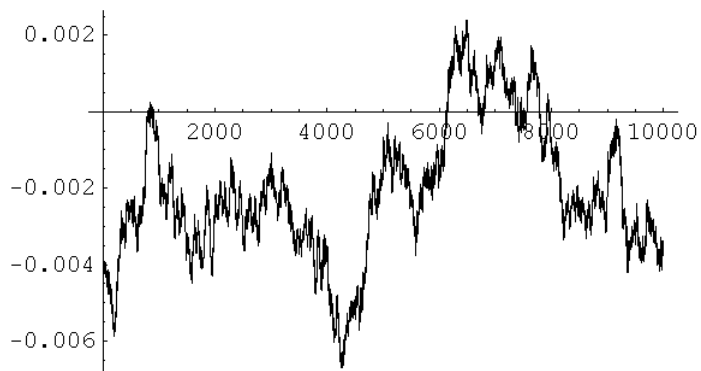
```
white = coloredNoise[10000, 0]
```



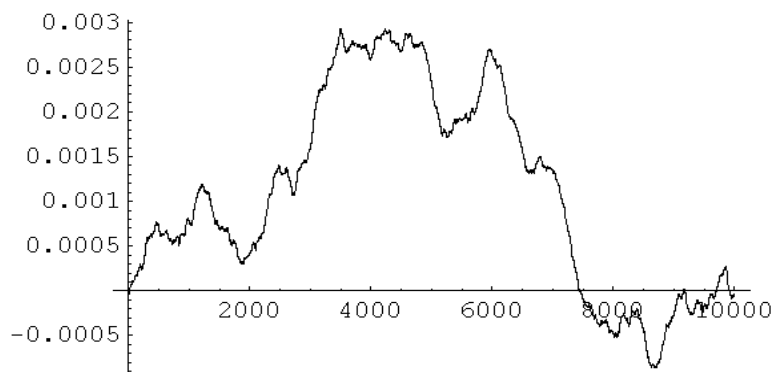
```
pink = coloredNoise[10000, 1]
(*  $\beta=1$ ; 1/f noise *)
```



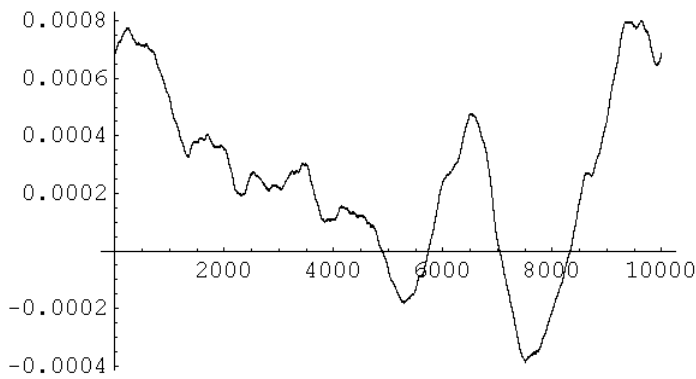
```
brown = coloredNoise[10000, 2]
(*  $\beta=2$ ; Brownian noise, random walk *)
```



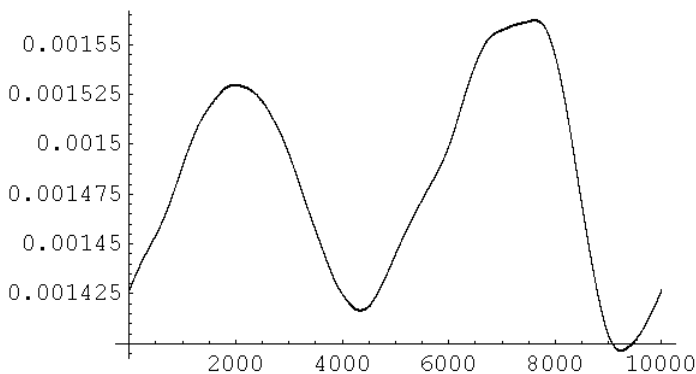
```
black = coloredNoise[10000, 3] (*  $\beta=3$  *)
```



```
smoothcurve = coloredNoise[10000, 4]
(*  $\beta=4$ ; smooth curve *)
```



```
smoothercurve = coloredNoise[10000, 7]
(*  $\beta > 4$ ; smoother curve *)
```



Figur 5. Profile mit verschiedenen Glättungsgraden β

Die phantasievollen Farbbezeichnungen (außer weiß) haben mit wirklichen Farben nichts zu tun und sind rein konventionell. Z.B. kommt „brown“ von „Brownian motion“, und „black“ ist reine Phantasie, ebenso wie „pink“ (Rosa). „Pink noise“ oder „1/f noise“ und andere Arten von „colored noise“ werden verwendet, als Fehlermodell für Elektronik und für geodätisch wichtige Technologien wie Inertialnavigation und Satellitengeodäsie (siehe z.B. (Jekeli 2001, Kap. 6; Pail 2005). Dieses „farbige Rauschen“ ist mehr oder minder stark korreliert und daher oft realistischer als das unkorrelierte weiße Rauschen. Über farbiges Rauschen findet man viel in „Wikipedia“, der englischen Internet-Enzyklopädie (http://en.wikipedia.org/wiki/Colors_of_noise usw.)

7. STOCHASTISCHE DIGITALE GELÄNDEMDELLE

Stochastische und digitale Geländemodelle sind sehr aktuell, wie ein Blick in das Internet zeigt. Wir nennen hier nur (Peitgen and Saupe 1988, Kap.2; Peitgen et al. 1992, besonders S. 497 ff.; Schroeder 1991, S.133 ff.). Eine direkte Verallgemeinerung der Programmformel von Abschn. 6 auf Dimension 2 führt zu stochastischen Geländemodellen. Wir erhalten unter der selbstverständlichen Annahme von Homogenität, Isotropie und Gleichverteilung, für $0 \leq \beta \leq 4$ (und größer):

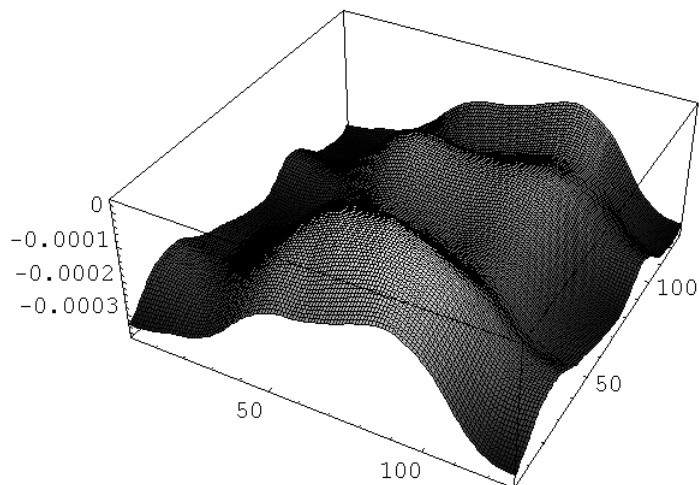

```

terrainModel[n_,  $\beta$ _] := Module[{n1,  $\beta$ 1},
n1 = n ;
 $\beta$ 1 =  $\beta$ ;
white = Table[(Random[] - 0.5), {n1}, {n1}];
fourier0 = Fourier[white];
fourier1 = Table[fourier0[[i]][[j]] / (i*i + j*j)^( $\beta$ /2),
{i, n1}, {j, n1}];
brown = Re[InverseFourier[fourier1]];
ListPlot3D[brown, ColorFunction -> GrayLevel]]

```

Die Auswertung dieser Formel gibt für glattes Gelände mit $\beta = 4$

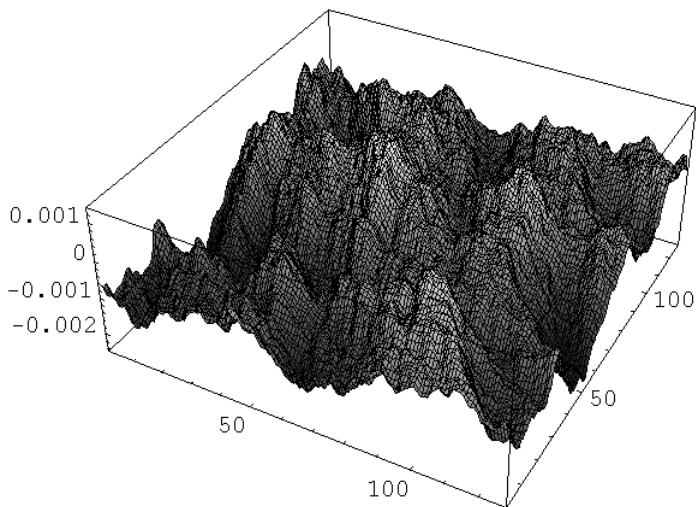
```
terrainModel[128, 4]
```



Figur 6. Glattes Gelände

und für zerklüftetes Gebirge, entsprechend der Brownschen Bewegung mit $\beta = 2$:

```
terrainModel[128, 2]
```



Figur 7. Hochgebirge

Die Mathematik erstaunt uns immer wieder durch die von ihr aufgezeigten subtilen Querverbindungen zwischen den verschiedensten Gebieten.

LITERATURHINWEISE

Brandstätter, G. (1990) Die Lageunsicherheit symmetrisch angeschlossener Quasipolygone. *ZfV*, 115: 97-106.

Jekeli, Ch. (2001) *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*. Walter de Gruyter, Berlin.

Moritz, H. (1960) An explanation of the “systematic” effect of accidental errors in aerial triangulation. *Photogrammetria*, XVII: 18-22.

Pail, R. (2005) A parametric study on the impact of satellite altitude errors on GOCE gravity field recovery. *J. Geodesy*, 79: 231-241.

Papoulis, A. (1981) *Systems and Transforms with Applications in Optics*. 2. Aufl., Robert E. Krieger, Malabar, Florida.

Peitgens, H.-O., und Saupe, D. (1988) *The Science of Fractal Images*. 1988, Springer, New York.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D. (1992) *Chaos and Fractals*. Springer, New York.

Schroeder, M. (1991) *Fractals, Chaos, Power Laws*. Freeman, New York.

Nachdruck mit freundlicher Genehmigung der Herausgeber aus *Festschrift 125 Jahre Geodäsie und Geoinformatik*,
Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformatik, Leibniz Universität Hannover, 2006